Differentialkvotient af cosinus og sinus

Overgangsformler

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

(bevises ved symmetribetragtninger på en enhedscirkel – overlades til læseren)

Additionsformler

$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$

$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

(bevises vha. vektorregning, se nedenfor)

Logaritmisk formel

$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

(Der findes også 4 af disse)

Bevis nedenfor.

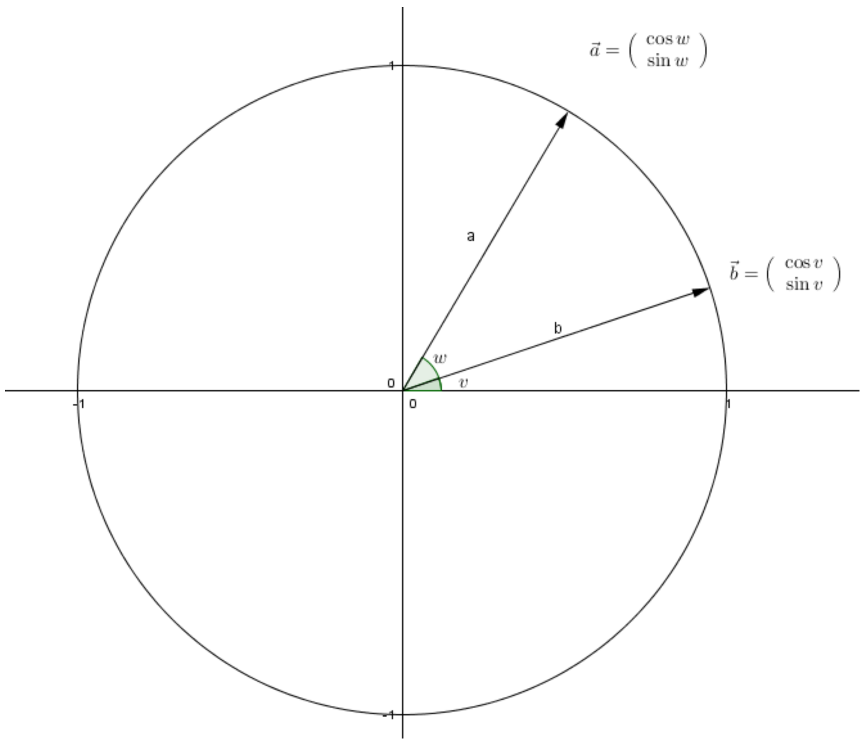
Sætninger og hjælpesætninger vedrørende differentiabilitet

1. Sinus og cosinus er kontinuerte
2. $\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \to 1$ for $\Delta x \to 0$
3. $\sin(x)$ er differentiabel, og $sin'(x) = \cos(x)$
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ og $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
5. $\cos(x)$ er differentiabel, og $cos'(x) = -\sin(x)$

Bevis for additionsformler:

Kilde: http://matematikeren.dk/matematikbeviser/additionsformlerne/

Se på denne figur:



$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er vektorer fra origo til et punkt på enhedscirklen, og v og w er vinklen fra førsteaksen til hver af de 2 vektorer. (Det ses ikke klart på tegningen).

Bemærk, at vinklen *mellem* $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er w-v

Koordinaterne til de 2 vektorer er da givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} \cos(w) \\ \sin(w) \end{pmatrix}$

Sætning om skalarprodukt giver da, at

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(w - v) = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(w) \\ \sin(w) \end{pmatrix}$$

Ved at udregne skalarproduktet og bruge at længden af vektorerne er 1, fås

$$\cos(w - v) = \cos(v)\cos(w) + \sin(v)\sin(w)$$

hvilket er den første af additionsformlerne.

Ved at indsætte -v i stedet for v i formlen, fås

$$\cos(w + v) = \cos(-v)\cos(w) + \sin(-v)\sin(w) = \cos(v)\cos(w) - \sin(v)\sin(w)$$

hvilket er den anden additionsformel. (Til det sidste lighedstegn er overgangsformlerne brugt)

For at bevise de sidste 2 additionsformler, bruges at arealet af parallelogrammet udspændt af de 2 vektorer, kan beregnes på 2 måder:

$$Areal = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin{(w - v)}$$

og

$$Areal = |\det{(\vec{a}, \vec{b})}| = |\det{(\vec{b}, \vec{a})}|$$

(Overvej selv, hvorfor det sidste lighedstegn gælder).

Længderne er stadig 1. Derved fås ved udregning af determinanten, at

$$\sin(w - v) = \cos(v)\sin(w) - \sin(v)\cos{(w)}$$

hvilket er den tredje additionsformel.

Den fjerde formel vises, ved igen at sætte –v ind på v's plads:

$$\sin(w + v) = \cos(-v)\sin(w) - \sin(-v)\cos(w) = \cos(v)\sin(w) + \sin(v)\cos{(w)}$$

Logaritmisk formel

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

Bevis

Vi ser først på $\sin(s + t) - \sin{(s - t)}$ og bruger additionsformlerne:

$$\sin(s + t) = \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin{(t)}$$

$$\sin(s - t) = \sin(s)\cos(t) - \cos(s)\sin{(t)}$$

Til sammen fås

$\sin(s + t) - \sin(s - t) = 2\cos(s)\sin{(t)}$ (*)

Vi sætter $x = s + t$ og $y = s - t$ og får

Vi udregner $x + y = s + t + s - t = 2s$ og $x - y = s + t - (s - t) = 2t$

Da fås (*) til

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\sin\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

hvilket skulle vises.

1. Sinus og cosinus er kontinuerte

Hvis x og x_0 er 2 punkter på enhedscirklen, og $x \to x_0$ vil $\sin(x) \to \sin(x_0)$ og tilsvarende for cosinus. Dette kan indses ved længdebetragtninger på enhedscirklen – vi overspringer detaljerne.

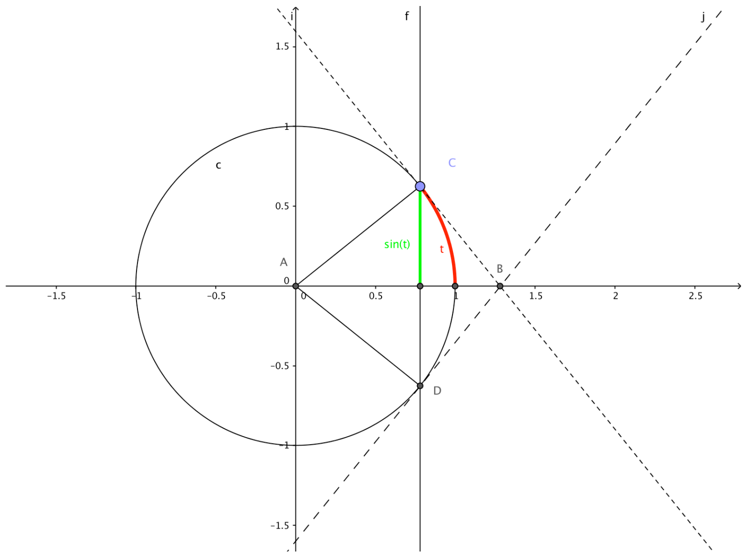
2. Hjælpesætning 1

$\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \to 1$ for $\Delta x \to 0$

hvilket også kan formuleres

$\frac{\sin(t)}{t} \to 1$ for $t \to 0$

Tegning findes interaktivt på http://kortlink.dk/n8tt - her kan du trække i punktet C og undersøge grænseværdien.



Bevis

Se på tegningen og indse, at den grønne linje har længden sin(t).

Se på trekant ACB. Den er retvinklet, da CB er tangent til enhedscirklen. Derfor gælder at $\tan(t) = \frac{modstående}{hosliggende} = \frac{|BC|}{|AB|} = |BC|$ fordi længden AB=1.

Vi har altså, at $\tan(t) = |BC|$

Det gælder derfor oplagt ifølge illustrationen[1], at

$\sin(t) < t < \tan(t)$ og dermed

$\sin(t) < t$ og $t < \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$

Når $0 < t < \frac{\pi}{2}$ er $\cos(t) > 0$ og vi kan dele med t i den første ligning og gange med cos(t) i den anden uden at ændre uligheden[2]:

$\frac{\sin(t)}{t} < 1$ og $\cos(t) < \frac{\sin(t)}{t}$

I alt haves

$$\cos(t) < \frac{\sin(t)}{t} < 1$$

Da $\cos(t) \to 1$ for $t \to 0$ vil $\frac{\sin(t)}{t}$ blive klemt inde mellem 1 og noget der nærmer sig til 1. Altså må der gælde, at $\sin(t)/t \to 1$ når $t \to 0$

---

[1] når $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Tilsvarende argument kan gennemføres for det negative tilfælde.

[2] hvis en ulighed ganges eller deles med et negativt tal, vendes ulighedstegnet.

3. Sin'(x)=cos(x)

Bevis:

Lad $f(x) = \sin(x)$

Vi bruger 3-trinsreglen:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}$$

Tælleren omskrives vha. den logaritmiske formel:

$$\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} = \frac{2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0} = \frac{\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = \cos(t)\cdot\frac{\sin(t)}{t}$$

hvor $t = \frac{x-x_0}{2}$

Lad nu $x \to x_0$ dvs $t \to 0$.

Ifølge hjælpesætningen vil sidste led gå mod 1.

Leddet $\cos(t) = \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \to \cos\left(\frac{2x_0}{2}\right) = \cos(x_0)$.

Hermed har vi, at $\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} \to \cos(x_0)$ for $x \to x_0$, hvilket skulle vises.

4. Hjælpesætning

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$ og tilsvarende $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$

Dette indses ved symmetribetragtning på enhedscirklen eller additionsformlerne:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(x) = 1\cdot\cos(x) - 0\cdot\sin(x) = \cos(x)$$

Tilsvarende for den anden formel.

5. Cos'(x)= -sin(x)

Dette kan bevises ved at bruge sammensat differentiation, idet der gælder, at

cos(x) er derfor sammensat af den "indre" funktion $\frac{\pi}{2} - x$ og den "ydre" sin(x).

Ved sammensat differentiation fås da, at cos(x) er differentiabel med

$cos'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1) = -\sin(x)$ ifølge ovenstående hjælpesætninger.