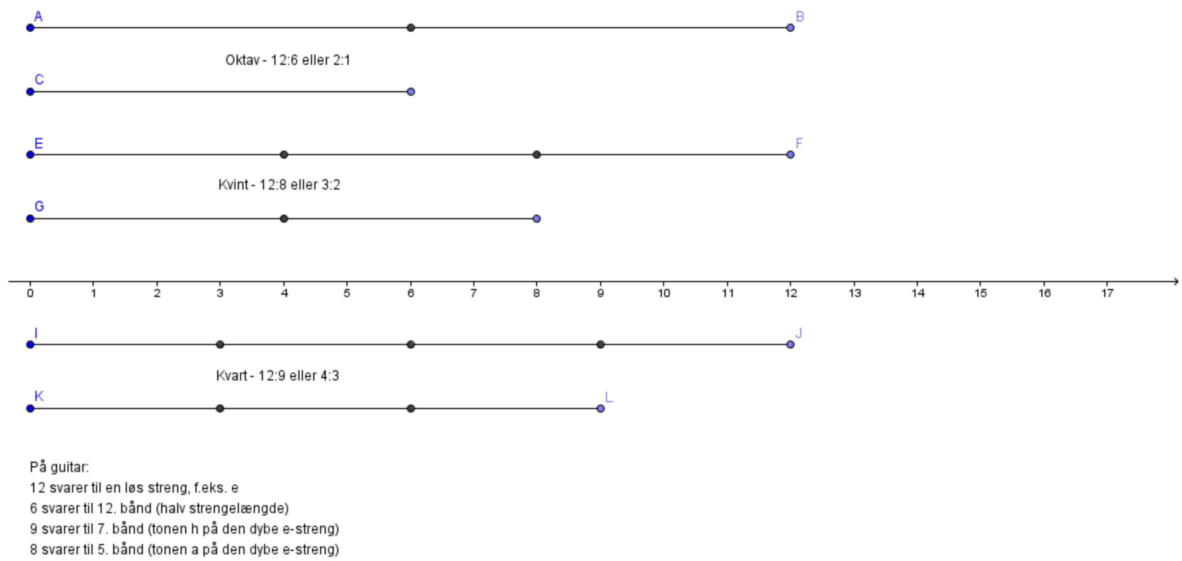
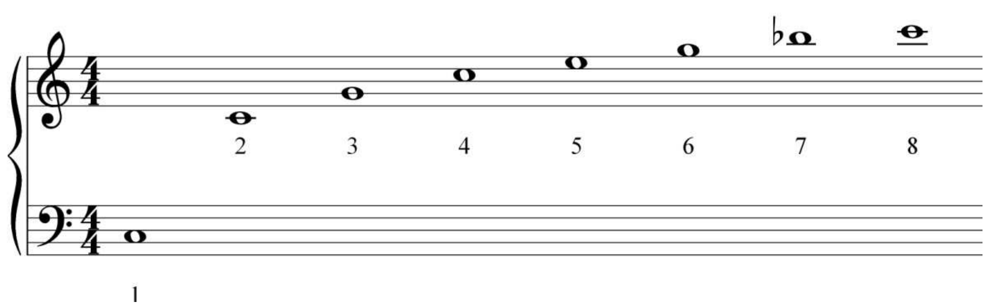
OM INTERVALLER OG TALFORHOLD

I oldtidens Grækenland opdagede man, at de pænt klingende intervaller oktav, kvart og kvint, svarede til nogle pæne talforhold mellem strengelængder: Oktaven er 2:1, kvinten 3:2 og kvarten 4:3.

Det var Pythagoras og hans elever (Pythagoræerne), der som de første beskrev sammenhængen matematisk, selv om det nok har været kendt før. De brugte ikke brøker, som vi gør i dag, men talte kun om forhold mellem hele tal. For at illustrere talforholdene kun ved brug af hele tal, kan man se på en (guitar-)streng, der inddeles i 12 lige store dele.



Talforholdene stammer i virkeligheden fra frekvensforholdene i den naturlige overtonerække:



Her ses det, at der er en oktav fra tone nr. 2 til 1, en kvint fra 3 til 2, og en kvart fra 4 til 3. (Herom kan man læse mere andre steder, f.eks. i Johannes Grønagers *Fysikken i musikken og 'den gode stemning'* (Systime, 2005)

Pythagoræerne har sandsynligvis haft en erfaringsmæssig viden om overtoner, men det er karakteristisk at de søger efter en matematisk begrundelse for de pæne talforhold.

Grækerne opfattede musik og matematik som to sider af samme ting – de var en del af den samme kosmiske orden. "Sfærernes musik" var den himmelske musik, som mennesker ikke kunne høre – men den jordiske musik var en afspejling af den himmelske. Disse forestillinger videreførtes i Middelalderen. Og den himmelske orden var ordnet efter tal, derfor måtte det samme gælde for musikken – "Himlen *er* harmoni og tal" som man sagde.

Det var derfor meget tilfredsstillende for grækerne, at de velklingende intervaller oktav, kvint og kvart havde de pænest tænkelige talforhold (dvs. med så små, hele tal som muligt). Det ville have undret dem, hvis det havde været anderledes.

Faktisk gav de sig til at bevise matematisk, at det nødvendigvis *måtte* være sådan. De havde 3 forskellige måder at finde et ”gennemsnit” af 2 tal på – beregningerne finder du i længere nede. Disse metoder anvendte de på oktavens talforhold 12:6. Den ene metode (”den aritmetiske middelværdi”) gav tallet 9, den anden (”den harmoniske middelværdi” tallet 8. Dermed havde man i begge tilfælde fået delt oktaven i 2 dele, kvart og kvint. Den tredje metode (”den geometriske middelværdi”) gav derimod problemer. Den gav nemlig et tal, som grækerne ikke kunne forstå eller acceptere. Vi kan i dag skrive det som $\sqrt{72}$ eller 8,485281374….. Den slags tal var ganske enkelt ikke en del af den græske matematik. Som en naturlig følge heraf, kunne det resulterende interval selvfølgelig ikke under nogen omstændigheder bruges musikalsk! Det passede jo ikke ind i den himmelske orden, hvor alt kunne udtrykkes vha. pæne tal.

Det interessante er, at det pågældende interval er *tritonus*. Den teoretiske afstandtagen fra tritonus blev overleveret til middelalderen (og dermed senere tider), hvor intervallet kaldes ”diabolus in musica”. Så tritonus blev undgået eller brugt med stor forsigtighed, både af praktiske hensyn – det er svært at synge det, og det er meget spændingsfyldt, men også fordi det ikke har et ”pænt” talforhold som kvarten og kvinten.

Som en lille ”krølle” på historien kan man tilføje, at de øvrige intervaller ikke har nær så ”pæne” talforhold som kvart og kvint, hvilket til langt op i Renæssancen fik den konsekvens, at et stykke musik skulle slutte med en kvint eller en oktav mellem stemmerne – tertsklangen var for dissonerende!

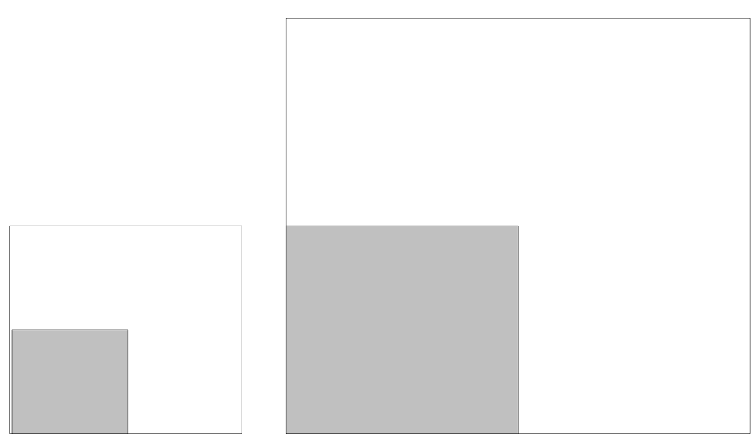
MATEMATIKKEN

9 er den *aritmetiske* middelværdi af 6 og 12, fordi 12 - 9 = 9 - 6. Dvs. $12 - x = x - 6$

8 er den *harmoniske* middelværdi, fordi $\frac{12-8}{12} = \frac{8-6}{6}$ (begge brøker er $\frac{1}{3}$). Dvs. x opfylder, at $\frac{12-x}{12} = \frac{x-6}{6}$

Den *geometriske* middelværdi mellem to tal findes således: Det største tal er lige så mange gange større end middelværdien, som middelværdien er større end det mindste tal. Dvs. x skal her opfylde at $\frac{12}{x} = \frac{x}{6}$

Navnet geometrisk middelværdi kan forklares vha. nedenstående tegning: Den største firkant er her 4 gange større end den mellemste. Og den mellemste er 4 gange større end den mindste. Den geometriske middelværdi er i dette tilfælde 4.

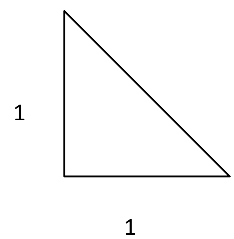


Man kan godt dele en *dobbeltoktav* på denne måde: En dobbeltoktav må have forholdet 4:1, eller 24:6, hvis resultatet skal blive et helt tal. Den geometriske middelværdi er da tallet 12, fordi 24:12 er det samme som 12:6

Eftersom oktaven lød ”pænt” var det for grækerne endnu et bevis på sammenhængen mellem musik og matematik – deres 3 metoder til at finde ”gennemsnit” svarede til det, de kunne høre.

Men én oktav lader sig ikke dele pænt. Hvis $\frac{12}{x} = \frac{x}{6}$, får vi, at $12 \cdot 6 = x^2$, dvs. $x = \sqrt{72}$. Eller hvis man blot regner på forholdet 2:1, $\frac{2}{x} = \frac{x}{1}$ dvs. $2 = x^2$, altså $x = \sqrt{2}$, et tal, som grækerne som sagt ikke kunne udtrykke.

Grækerne stødte flere gange på de ”grimme” tal (som vi i dag kalder *irrationelle* tal), f.eks. som længden af den sidste side i denne trekant, der kan findes vha. ”Pythagoras’ sætning” – men det fik dem altså ikke til at acceptere dem.



VIDEREDELING AF OKTAVEN

Det var naturligvis oplagt, også for grækerne (nærmere betegnet Archytas fra Tarent) at forsøge at dele de nu fundne intervaller kvint og kvart i mindre dele. Hvis man deler kvinten vha. den aritmetiske middelværdi får man følgende:

$$12 - x = x - 8$$

$$12 - 10 = 10 - 8$$

Dvs. den aritmetiske middelværdi af 12 og 8 er 10. $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ og $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

5:4 viser sig at være en stor terts, og 6:5 en lille terts – sammenlign med overtonerækken.

Archytas konstruerede en skala, der bl.a. brugte disse talforhold.

Men uanset hvordan man går til værks, støder man på nogle praktiske problemer, der i bund og grund skyldes overtonerækkens problem: 7 oktaver bliver ikke det samme som 12 rene kvinter. Så længe musikken var enstemmig og umodulerende var det ikke noget stort problem i praksis, men alligevel havde man åbenbart et behov for at begrunde skalaernes talforhold matematisk. Den såkaldte tempererede stemning, der slår igennem i begyndelsen af 1700-tallet (som man må læse om andre steder), er også en matematisk konstruktion, hvor kun oktaverne er helt rene. Det interessante er efter min opfattelse ikke så meget de konkrete talforhold ved de forskellige skalaer, men snarere den vekselvirkning der har været mellem matematiske begrundelser og komponisternes musik.